T-292

CONSTRUCCIÓN DE SÓLIDOS EN GEOGEBRA

Angie Cristina Solís Palma
ansolis@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: GeoGebra, curva, superficie, sólido.

Resumen
El taller se llevará a cabo utilizando una guía de trabajo. En esta se explica a cada participante el procedimiento para graficar en el software GeoGebra un sólido.
Primero se le presentará al participante un sólido limitado por una lista de superficies, este debe realizar un dibujo del sólido a mano, para tener claro cada una de las caras, aristas y vértices que lo conforman. Luego debe proyectar cada una de las caras, parametrizar la superficie que define la cara e ingresar esta parametrización en el software para que este realice la gráfica de la superficie. Al final el participante tendrá la representación del sólido en su trabajo digital.

Introducción

Este trabajo consiste en un taller sobre la utilización del software GeoGebra para la graficación de sólidos, está dirigido a docentes universitarios. Es necesario que los participantes cuenten con conocimientos básicos del programa y del cálculo en varias variables (Secciones cónicas, superficies y sólidos). Cada participante seguirá una guía de trabajo para poder realizar el gráfico correspondiente y podrá realizar consultas a la instructora durante el avance de su trabajo.

Objetivo

Brindar a los docentes del campo de la matemática una guía de trabajo que explica cómo utilizar el programa GeoGebra para graficar curvas y superficies para crear sólidos.

Marco teórico

ISBN 978-84-945722-3-4

Según Gamboa, (2007), el uso de herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática cada día es más frecuente, además la tecnología le permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes, por ejemplo "lápiz y papel", sería difíciles de obtener.

En mi opinión, el uso de estas herramientas es de mucha ayuda en aquellos temas que involucran graficación de curvas, superficies o sólidos, ya sea en el plano o en el espacio, ya que muchas de esas figuras son difíciles de imaginar y dibujar, pero con la ayuda de un graficador se puede facilitar.

Además GeoGebra es un programa gratuito, fácil de instalar y de usar, que nos puede ayudar a comprender de una mejor manera el comportamiento de las figuras en tres dimensiones. Y se puede utilizar tanto en computadora como en teléfonos y tabletas.

Metodología y resultados: Guías de trabajo

Se realizará la construcción del gráfico del sólido del ejemplo 1 en el programa GeoGebra.

Ejemplo 1: Considere el sólido limitado por las superficies: $S_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$, $S_2: 2x + z = 10$, $S_3: x = 3$, $S_4: z = 3$, $S_5: y = 0$ y $S_6: z = 0$.

Realice la gráfica del sólido en GeoGebra.

Solución

Siga la lista de instrucciones que se enumeran a continuación, si tiene alguna duda en algún paso llame a su instructora.

1.

2. Realice un dibujo a mano del sólido requerido. Es importante determinar las coordenadas de sus vértices. Ver Figura 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

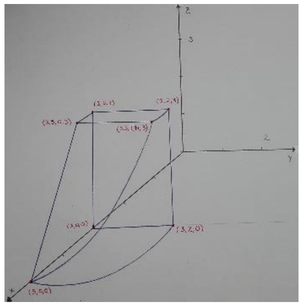
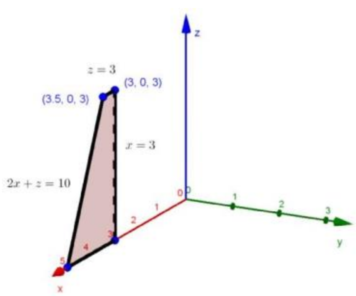


Figura 1. Sólido dibujado a mano

Cara 1, limitada por la superficie: $S_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$

3. Para graficar la cara 1, se debe proyectar esta cara sobre alguno de los planos coordenados, donde la proyección sea una región. Ver Figuras 2 y 3.

Nota: Si la superficie que forma la cara es un cilindro solo hay dos posibles proyecciones las cuales se generan al escoger como plano coordenado de proyección, el plano que contiene una de sus variables y la variable ausente.



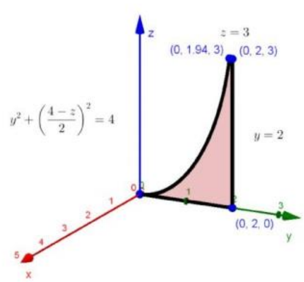


Figura 2: Proyección de la cara 1 sobre XZ.

Figura 3: Proyección de la cara 1 sobre YZ.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

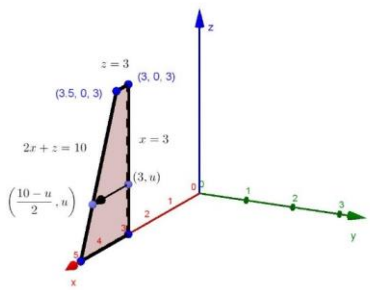
4. Para este caso se trabajará con la proyección sobre el plano XZ (Figura 2). Ahora dibuje dentro de la proyección un vector en cualquiera de las dos direcciones, hacia el eje X (Figura 4) o hacia el eje Z (Figura 5).

Nota:

- Si dibuja el vector hacia el eje X, se tomará $z = u$ y se utilizará u como parámetro el cual puede tomar cualquier valor en el intervalo donde existe z.
- Si dibuja el vector hacia el eje Z, se tomará $x = u$ y se utilizará u como parámetro el cual puede tomar cualquier valor en el intervalo donde existe x.

Si el vector tiene entradas o salidas diferentes en la proyección, debe hacer vectores diferentes para cada entrada o salida con parámetros diferentes.

- Cada vector debe tener un punto de salida y uno de llegada, estos puntos solo pueden depender del parámetro u, utilice las ecuaciones de las curvas que limitan la proyección para despejar las variables necesarias.



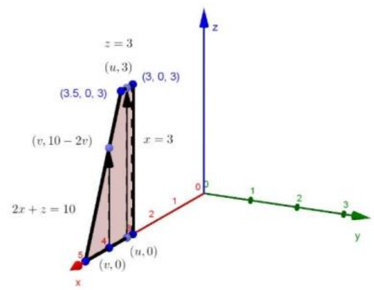


Figura 4: Vector en dirección del eje X. Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Figura 5: Vector en dirección del eje Z. Parámetros: $3 \leq u \leq 3{,}5$ y $3{,}5 \leq v \leq 5$

5.

ISBN 978-84-945722-3-4

6. Trabaje con la imagen que tiene el vector en la dirección del eje X (Figura 4), debido a que con un solo vector y u variando en $[0,3]$ se abarca toda la proyección.

7. Parametrice el segmento de recta que inicia en el punto $(3, u)$ y finaliza en el punto $\left(\frac{10-u}{2}, u\right)$. Tome en cuenta que como se está proyectando en el plano XZ, el valor para y es 0, por lo tanto, en tres dimensiones esos dos puntos serían $(3,0,u)$ y $\left(\frac{10-u}{2}, 0, u\right)$.
Si necesita ayuda para parametrizar utilice la información que se muestran en el Anexo 1.

$$c(t): \begin{cases} x = 3 + t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y = 0 \\ z = u \end{cases} \quad ; \qquad t \in [0,1]$$

8. Este segmento depende de un parámetro u, si se le da movimiento a u en la región proyectada, la parametrización del segmento pasaría a ser la parametrización de la región proyectada.

$$s(u,t): \begin{cases} x = 3 + t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y = 0 \\ z = u \end{cases} \quad ; \qquad u \in [0,3], t \in [0,1]$$

9. Para llevar la superficie parametrizada al lugar en el espacio que le corresponde, se debe involucrar la superficie S_1 que le da su altura en y. Para ello despeje y de S_1.

$$y = \sqrt{4-(x-3)^2}$$

Nota: Debe tener cuidado al despejar una variable que esta elevada al cuadrado, ya que siempre se obtienen dos opciones, y es necesario saber si se requiere la positiva o la negativa.

10. Sustituya el valor de x de la parametrización del paso 6. en la ecuación del paso 7.

$$y = \sqrt{4-\left(t\left(\frac{4-u}{2}\right)\right)^2}$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

11. Sustituya el valor de y de la ecuación del paso 8. en la parametrización del paso 6.

$$s(u,t):\begin{cases} x = 3+t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y = \sqrt{4-\left(t\left(\dfrac{4-u}{2}\right)\right)^2} \\ z = u \end{cases} ; \qquad u \in [0,3], t \in [0,1]$$

Esta es la superficie que corresponde a la primer cara del sólido.

12. Ingrese a GeoGebra la superficie que corresponde a la primer cara del sólido, escriba la palabra “Superficie” en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, GeoGebra le completará la guía para ingresar la superficie, usted debe seleccionar la opción que se muestra en la Figura 6.

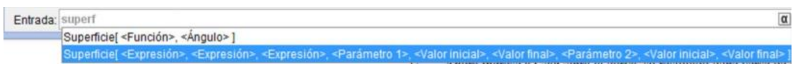


Figura 6: Ingreso en GeoGebra de una superficie parametrizada.

13. Donde indica <Expresión> se debe escribir la parametrización de las tres variables, en el orden x, y, z.

14. En <Parámetro 1> se escribe u, <Valor inicial 1> y <Valor final 1> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 1, en este caso $u \in [0,3]$.

15. En <Parámetro 2> se escribe t, <Valor inicial 2> y <Valor final 2> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 2, en este caso $t \in [0,1]$.

16. Su entrada debe quedar como se muestra en la Figura 7.

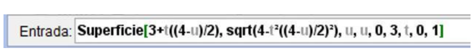


Figura 7: Ingreso en GeoGebra de la cara 1 del sólido.

17. Cuando haya terminado, pulse la tecla “Enter” para poder ver su superficie. Ver Figura 8.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

18. Realice un procedimiento similar al anterior para graficar las otras caras, el resultado debe ir quedando como se muestra en las figuras de la 9 a la 13.

19.

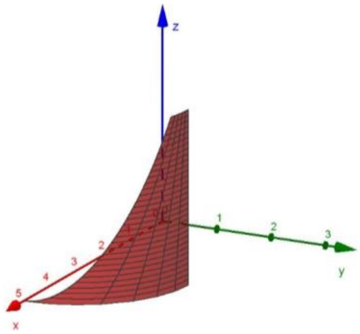


Figura 8: Cara 1, limitada por la superficie:

$S_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$

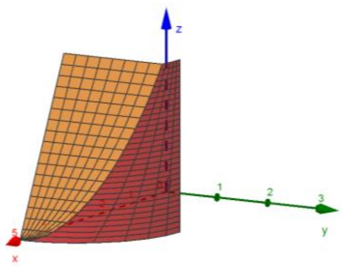


Figura 9: Se agrega cara 2, limitada por: $S_2: 2x + z = 10$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

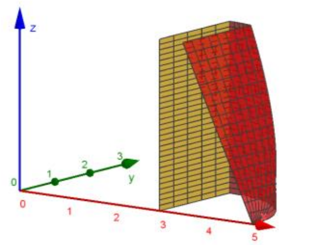


Figura 10: Se agrega cara 3, limitada por: $S_3: x = 3$.

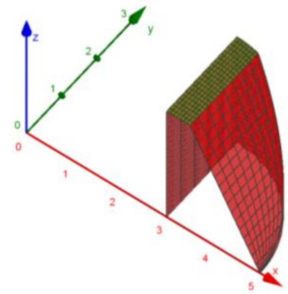


Figura 11: Se agrega cara 4, limitada por: $S_4: z = 3$.

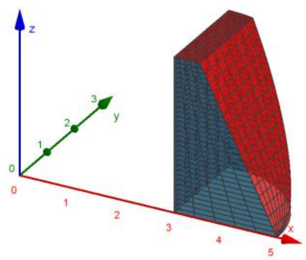


Figura 12: Se agrega cara 5, limitada por: $S_5: y = 0$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

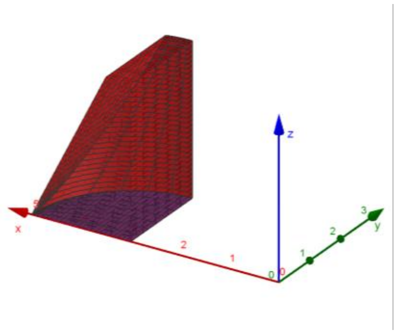


Figura 13: Se agrega cara 6, limitada por: $S_6: z = 0$

1.

20. Cambie los colores de las caras y elimine la maya, esos cambios los puede hacer en las propiedades de cada superficie. Ver Figura 14.

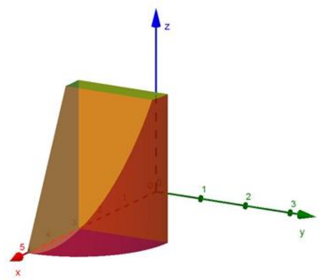


Figura 14: Sólido con sus caras de diferentes colores

21.

22. Se pueden agregar las aristas del sólido, para ello se deben calcular a pie las intersecciones de las superficies, y utilizando los vértices de nuestro primer sólido a mano, se irán encontrando y parametrizando cada curva para poder graficarla en GeoGebra.

23.

ISBN 978-84-945722-3-4

Arista 1: intersección de S_1 con S_6

$$(x-3)^2+y^2=4 \bigcap z=0$$

$$c(t):\begin{cases} x=3+2\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=0 \end{cases} \quad ; \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

En GeoGebra su entrada debe quedar:

Entrada: **Curva[3+2*cos(t), 2*sen(t), 0, t, 0, pi/2]**

Ver Figura 15.

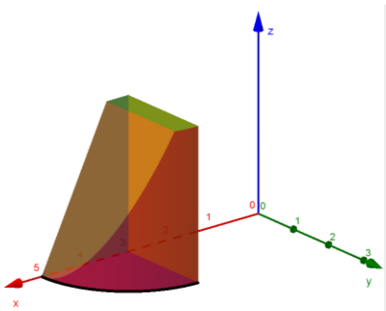


Figura 15: Arista 1: intersección de S_1 con S_6.

Arista 2: intersección de S_1 con S_2

$$(x-3)^2+y^2=4 \bigcap 2x+z=10$$

Despejar y y z, x será el parámetro

$$c(t):\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{4-(t-3)^2} \\ z=10-2t \end{cases} \quad ; \qquad t\in[3.5,5]$$

Ver Figura 16.

ISBN 978-84-945722-3-4

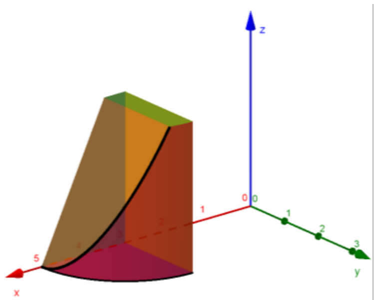


Figura 16: Arista 2: intersección de S_1 con S_2

Arista 3: intersección de S_1 con S_4

$$(x-3)^2+y^2=4\bigcap z=3$$

$$c(t):\begin{cases} x=3+2\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=3 \end{cases} \quad ; \qquad t\in\left[1.318,\frac{\pi}{2}\right]$$

Ver Figura 17.

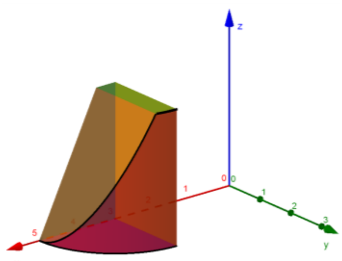


Figura 17: Arista 3: intersección de S_1 con S_4.

ISBN 978-84-945722-3-4

24. Las otras aristas son segmentos de recta entre vértices, por lo que se ingresan en GeoGebra como segmento de punto a punto: 

. Por último se pueden agregar los vértices del sólido. Ver Figura 18.

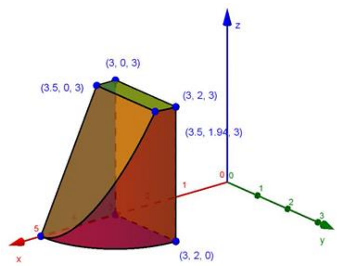


Figura 18: Sólido con caras, aristas y vértice

Conclusión

El software GeoGebra, utilizado correctamente en cursos de cálculo en varias variables (aunque su uso puede extenderse a otras áreas de la matemática) puede ser de gran utilidad para los estudiantes, de esta manera ellos lograrán mediante las vistas, y propiedades de objetos tridimensionales determinar detalles que de otra forma tendrían que imaginar.

Referencias bibliográficas

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill.

Mora, W. (2015). *Cálculo en varias variables*. Cartago, Costa Rica: Revista Digital: Matemática, Educación e Internet.

Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6890/6576 Consultado 01/01/2017

Geogebra (s.f.). Manual. https://wiki.geogebra.org/es/Manual Consultado 01/01/2017

Geogebra (s.f.). Tutoriales. https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales Consultado 1/1/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 1

A continuación se muestra la parametrización de algunas curvas en general:

1. Segmento de recta que inicia en $A(a_1, a_2, a_3)$ y termina en $B(b_1, b_2, b_3)$.

Su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases} ; \qquad t \in [0,1]$$

2. Círculo en YZ sobre el plano $x = x_1$:

$$\begin{cases} (y-j)^2 + (z-k)^2 = r^2 \\ x = x_1 \end{cases}$$

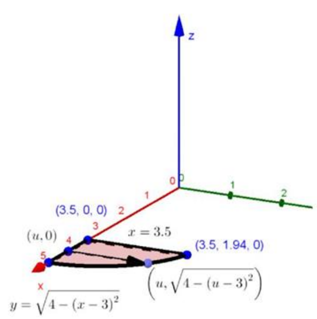
Usando $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = x_1 \\ y = j + r\cos t \\ z = k + r\operatorname{sen} t \end{cases} ; \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Anexo 2

A continuación se presentan la proyección y las parametrizaciones utilizadas para las caras de la 2 a la 6 del sólido del ejemplo 1.

Cara 2, limitada por la superficie: $S_2: 2x + z = 10$

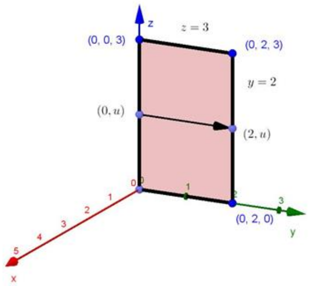


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$$s(u,t):\begin{cases} x=u \\ y=t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z=10-2u \end{cases} \quad ; \qquad u\in[3.5,5], t\in[0,1]$$

Figura 19: Proyección de la cara 2 y vector en dirección del eje Y. Parámetro: $3{,}5 \leq u \leq 5$

Cara 3, limitada por la superficie: $S_3: x = 3$

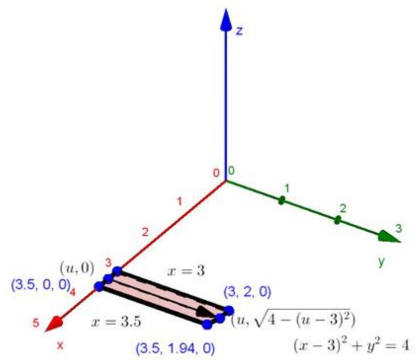


$$s(u,t):\begin{cases} x=3 \\ y=2t \\ z=u \end{cases} \quad ; \qquad u\in[0,3], t\in[0,1]$$

Figura 20: Proyección de la cara 3 y vector en dirección del eje Y. Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Cara 4, limitada por la superficie: $S_4: z = 3$

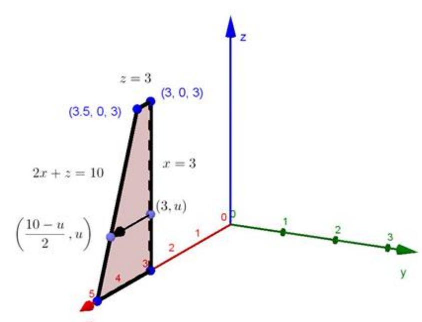
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



$$s(u,t):\begin{cases} x = u \\ y = t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z = 3 \end{cases} \quad ; \qquad u \in [3, 3.5], t \in [0,1]$$

Figura 21: Proyección de la cara 4 vector en dirección del eje Y. Parámetro: $3 \le u \le 3{,}5$

Cara 5, limitada por la superficie: $S_5 : y = 0$



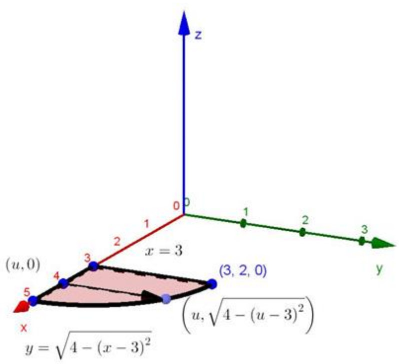
$$s(u,t):\begin{cases} x = 3 + t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y = 0 \\ z = u \end{cases} \quad ; \qquad u \in [0,3], t \in [0,1]$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 22: Proyección de la cara 5 y vector en dirección del eje X

Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Cara 6, limitada por la superficie: $S_6: z = 0$



$$s(u,t):\begin{cases} x = u \\ y = t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z = 0 \end{cases} ; \qquad u \in [3,5], t \in [0,1]$$

Figura 23: Proyección de la cara 6 y vector en dirección del eje Y

Parámetro: $3 \leq u \leq 5$

Anexo 3

A continuación se facilita un ejercicio adicional.

ISBN 978-84-945722-3-4

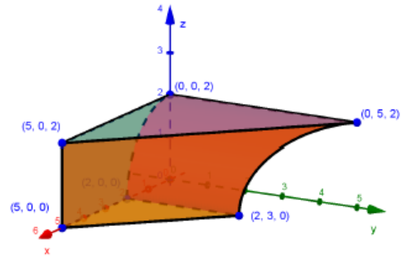
Ejercicio

1 Considere el sólido limitado por las superficies:

$$S_1 : x^2 + z^2 = 4, \quad S_3 : z = 2, \quad S_5 : y = 0,$$
$$S_2 : x + y = 5, \quad S_4 : z = 0,$$

Realice la gráfica del sólido en GeoGebra.

Solución



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4